LOGARITHME NEPERIEN

Définitions

La fonction logarithme népérien est l'unique fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ qui vérifie $\ln 1 = 0$ et $\forall x \in]0,+\infty[\quad (\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$.

<u>Expression</u> : $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$

<u>Interprétation géométrique</u> : Si $a \geq 1$, $\ln a$ est l'aire (en unités d'aire) de la partie de plan limitée par la courbe (C) d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, l'axe Ox et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$. Si $0 < a < 1$, $\ln a$ est l'opposé de cette aire.

Propriété fondamentale

$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$.

<u>Conséquences</u> : $\ln(a^k) = k \ln a$ pour tout entier k.

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln a \qquad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Limites

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

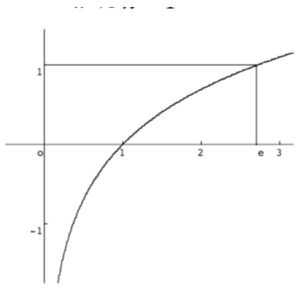
$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Signe

x	0		1		$+\infty$
$\ln$		$-$	0	$+$	

Courbe

x	0	$+\infty$
$\ln$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$



$\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$ ($e \approx 2{,}718$)