ESPACES PROBABILISES

Propriétés des tribus

$\varnothing \in \mathscr{A}$.

Si A et B sont des éléments de $\mathscr{A}$, alors : $A \cap B \in \mathscr{A}$, $A \cup B \in \mathscr{A}$ et $A - B \in \mathscr{A}$.

Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$: $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

Espace probabilisable

Un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ associé à l'expérience aléatoire est la donnée de l'univers Ω et d'une tribu $\mathscr{A}$ d'événements.

Probabilité

Une probabilité P sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application de l'ensemble des événements $\mathscr{A}$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie :

1) $P(\Omega) = 1$.

2) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Espace probabilisé

Un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est la donnée de l'univers Ω, d'une tribu $\mathscr{A}$ d'événements et d'une probabilité P.

Cas d'un univers fini ou dénombrable

Dans le cas où Ω est un univers fini ou dénombrable, on prend en général pour tribu d'événements $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.

Si $\Omega = \{\omega_i \,/\, i \in I\}$ où I est un ensemble fini ou dénombrable, la probabilité P est déterminée par les probabilités des événements élémentaires $p_i = P(\{\omega_i\})$:

$P(\varnothing) = 0$ et si $A \neq \varnothing$, alors $P(A) = \sum_{i\in J} p_i$ où $J = \{i \in I \,/\, \omega_i \in A\}$.

<u>Réciproquement</u> une famille de nombres $(p_i)_{i\in I}$ définit une probabilité sur Ω ssi : $\forall i \in I \quad 0 \le p_i \le 1$ et $\sum_{i\in I} p_i = 1$.

Equiprobabilité dans le cas d'un univers fini

Si Ω est un univers fini, il y a équiprobabilité sur Ω si tous les événements élémentaires ont même probabilité (tous les p_i sont égaux). Alors $P(A) = \dfrac{\text{Card}\, A}{\text{Card}\, \Omega}$ pour tout événement A.

Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et B un événement de probabilité $P(B) \neq 0$. Alors l'application P_B qui, à tout élément A de $\mathscr{A}$, associe le réel positif $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$: la probabilité conditionnée par B.

Propriétés : $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$.

$$P_B(A \cup A') = P_B(A) + P_B(A') - P_B(A \cap A').$$

Formule des probabilités composées

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

si pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a $P(A_1 \cap \ldots \cap A_k) \neq 0$

Cas particulier : $P(A \cap B) = P_B(A) P(B) = P_A(B) P(A)$ si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$

Système complet d'événements

$(B_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements s'ils sont 2 à 2 incompatibles ($B_i \cap B_j = \varnothing$ si $i \neq j$), si leur réunion est Ω et si $\forall i \in I \quad P(B_i) \neq 0$.

Cas particulier : un événement B et son contraire $\overline{B}$.

Formule des probabilités totales

Si $(B_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements :

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \cap B_i) = \sum_{i \in I} P_{B_i}(A) P(B_i).$$

Cas particulier : $P(A) = P_B(A) P(B) + P_{\overline{B}}(A) P(\overline{B})$.

Formule de Bayes

Si $(B_i)_{i\in I}$ est un <u>système complet</u> d'événements :

$$P_A(B_k) = \frac{P_{B_k}(A)P(B_k)}{\sum_{i\in i} P_{B_i}(A)P(B_i)} .$$

Indépendance de deux événements

A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.

Alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

Deux <u>tribus</u> $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont <u>indépendantes</u> si tout élément de $\mathscr{A}$ est indépendant de tout élément de $\mathscr{B}$:

$$\forall (A,B)\in \mathscr{A}\times\mathscr{B} \quad P(A\cap B) = P(A)P(B) .$$

Indépendance de plusieurs événements

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements avec I fini ou dénombrable.

Les événements A_i sont <u>deux à deux indépendants</u> si pour tous $i\neq j$, A_i et A_j sont indépendants.

Les événements A_i sont <u>mutuellement indépendants</u> si pour toute partie <u>finie</u> J de I, on a : $P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$.

Alors les événements B_i avec $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$ sont indépendants

L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux.