SUITES NUMERIQUES

Définition

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$.
La suite de terme général u_n (image de l'entier n) est notée (u_n).

Sens de variations

La suite (u_n) est croissante si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Si la suite est à termes positifs : La suite (u_n) est croissante ssi :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et décroissante ssi : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Bornes d'une suite

La suite est majorée s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$.

La suite est minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$.

La suite est bornée si elle est majorée et minorée.

Suite divergente

La suite (u_n) est convergente si elle admet une limite réelle.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ si : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$

Compatibilité avec l'ordre

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et :

- si les suites (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' alors $\ell \leq \ell'$ (inégalité large même si l'inégalité sur les termes généraux est stricte)
- si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge vers $+\infty$.
- si (v_n) diverge vers $-\infty$, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Théorème d'encadrement

Si, à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes vers le même ℓ, alors la suite (u_n) est convergente et sa limite est ℓ.

Opérations algébriques sur les limites

u_n	v_n	$u_n + v_n$
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**Indétermination**

u_n	v_n	u_n / v_n
ℓ	$\ell' \neq 0$	ℓ / ℓ'
$\ell \neq 0$	0	∞
0	0	**Indétermination**
∞	ℓ'	∞
ℓ	∞	0
∞	∞	**Indétermination**

u_n	v_n	$u_n v_n$
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
∞	$\ell' \neq 0$	∞
∞	0	**Indétermination**
∞	∞	∞

Image d'une suite par une fonction

Si f est une fonction définie sur un intervalle I telle que $\lim_{x \to \ell} f(x) = L$ et si (u_n) est une suite d'éléments de I qui a pour limite ℓ, alors la suite de terme général $f(u_n)$ a pour limite L.

Convergence des suites monotones

Toute suite croissante majorée est convergente et sa limite est un majorant. Si elle n'est pas majorée, elle diverge vers $+\infty$.
Toute suite décroissante minorée est convergente et sa limite est un minorant. Si elle n'est pas minorée, elle diverge vers $-\infty$.

Suites adjacentes

Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si (u_n) est croissante et (v_n) décroissante, et si $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.
Alors les deux suites sont convergentes et ont la même limite.

Négligeabilité

(u_n) est négligeable devant (v_n), noté $u_n = o(v_n)$, s'il existe une suite (ε_n) qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \varepsilon_n v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Si $u_n = o(v_n)$ et si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) converge vers 0.

<u>Négligeabilités usuelles</u> :

- $n^\alpha = o(n^\beta)$ si $0 \leq \alpha < \beta$.
- $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$ si $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$.
- $n^\alpha = o(e^{\beta n})$ si $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$.
- $n^\alpha = o(a^n)$ si $\alpha \geq 0$ et $a > 1$.

<u>Propriétés</u> :

- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v_n)$, alors $u_n + u'_n = o(v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $u'_n = o(v'_n)$, alors $u_n u'_n = o(v_n v'_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $\underline{\alpha > 0}$, alors $|u_n|^\alpha = o(|v_n|^\alpha)$.

<u>Mais</u> la relation de négligeabilité n'est compatible ni avec la division (et donc les puissances négatives) ni avec la composition.

Equivalence

(u_n) est équivalente à (v_n), noté $u_n \sim v_n$, s'il existe une suite (ε_n) qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Si $u_n \sim v_n$, alors les suites (u_n) et (v_n) sont de même nature et admettent la même limite.

Equialences usuelles :

- En $+\infty$, un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré et une fraction rationnelle est équivalente au quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell\ (\neq 0)$, alors $u_n \sim \ell$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors :
  - $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
  - $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.
  - $(1+u_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha u_n$.
  - $\sin u_n \sim u_n$.
  - $\tan u_n \sim u_n$.
  - $1-\cos u_n \sim \dfrac{1}{2}u_n^2$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, alors : $\ln u_n \sim u_n - 1$

Propriétés :

- $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$. On écrit $u_n = v_n + o(v_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n w_n \sim v_n w_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $\dfrac{u_n}{u'_n} \sim \dfrac{v_n}{v'_n}$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $|u_n|^{\alpha} \sim |v_n|^{\alpha}$.

Mais la relation d'équivalence n'est compatible ni avec l'addition ni avec la composition.