SUITES USUELLES

Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel b (appelé raison de la suite) tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = u_n + b$.

Alors son terme général est : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = u_0 + nb$.

Pour tous les entiers n et p : $u_n = u_p + (n-p)b$.

Pour tous les entiers $p \leq n$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$

Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel a (appelé raison de la suite) tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = au_n$.

Alors son terme général est : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = a^n u_0$.

Pour tous les entiers n et p : $u_n = a^{n-p} u_p$.

Pour tous les entiers $p \leq n$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1-a^{n-p+1}}{1-a}$ si $a \neq 1$.

Convergence de (a^n)

$a \leq -1$	$-1 < a < 1$	$a = 1$	$a > 1$
Pas de limite	$\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$

Suites arithmético-géométriques

Une suite (u_n) est arithmético-géométrique s'il existe des réels $a \neq 0$ et b tels que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = au_n + b$.

Si $a \neq 1$, il existe un unique réel α (point fixe) tel que $\alpha = a\alpha + b$.

Alors, la suite de terme général $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison a. On en déduit v_n, puis u_n en fonction de n.

Suites vérifiant une récurrence linéaire d'ordre

Une suite (u_n) suit une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 s'il existe deux réels $a \neq 0$ et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

L'équation $x^2 = ax + b$ est appelée équation caractéristique associée à la relation de récurrence.

Elle équivaut à $x^2 - ax - b = 0$. Son discriminant est $\Delta = a^2 + 4b$.

Premier cas : $\Delta > 0$.

L'équation caractéristique possède deux racines distinctes q_1 et q_2.

Alors il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha(q_1)^n + \beta(q_2)^n$$

On détermine les réels α et β à l'aide des conditions initiales.

Deuxième cas : $\Delta = 0$.

L'équation caractéristique possède une racine double q.

Alors il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\alpha n + \beta)q^n$$

On détermine les réels α et β à l'aide des conditions initiales.

Troisième cas : $\Delta < 0$.

L'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées que l'on met sous forme trigonométrique : $q_1 = re^{i\theta}$ et $q_2 = re^{-i\theta}$.

Alors il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = r^n[\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)]$$

On détermine les réels α et β à l'aide des conditions initiales.